Het projectieve vlak.

1. Onder het projectieve vlak verstaan wij het Euclidische vlak, aangevuld met de oneigenlijke punten.

2. Axioma Er bestaat een een-eenduidige afbeelding van de punten van het projectieve vlak op de getallenverhoudingen $(x_0, x_1, x_2,)$, waarbij de punten van een lijn afgebeeld worden op de oplossing van een homogene vergelijking van de eerste graad $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ (vergelijking van de lijn); omgekeerd stelt iedere vergelijking van deze vorm een rechte lijn voor.

Toelichting. Een verhouding (x_0, x_1, x_2) is gegeven door drie getallen, die niet alle 0 zijn; een drietal (kx_0, kx_1, kx_2), waarin $k \neq 0$, bepaalt dezelfde verhouding.

Bepaling. Is P afgebeeld op de verhouding (p_0, p_1, p_2), dan heet ieder drietal (kp_0, kp_1, kp_2) $(k \neq 0)$ een stel coördinaten van P. Legt men een bepaalde waarde voor k vast, dan normeert men de coördinaten

3. De vergelijking van de lijn door $P(p_i)$ en $Q(q_i)$ luidt:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

4. Twee rechte lijnen hebben één punt gemeen of vallen samen.

Opdat drie rechte lijnen

$$\left.\begin{array}{ll} (l) & a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \\ (m) & b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \\ (n) & c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

een punt gemeen hebben is nodig en voldoende dat

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.2)$$

Zijn de eerste twee lijnen van (4.1) verschillend, dan geeft (4.2) tevens de voorwaarde opdat de vergelijkingen $\lambda a_i + \mu b_i = c_i$ $(i=0,1,2)$ een oplossing bezitten. In dit geval en slechts in dit geval kan de derde vergelijking geschreven worden als

$$\lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0 \qquad (4.3)$$

of verkort: $\lambda l + \mu m = 0$

(4.3) is de vergelijking van de lijnenwaaier, door l en m bepaald.

5. Zijn $P(p_i)$ en $Q(q_i)$ twee punten van een lijn l, dan kunnen de coördinaten van een willekeurig punt R van l volgens de theorie der lineaire vergelijkingen geschreven worden in de vorm:

$$r_i = \lambda p_i + \mu q_i \quad (i=0,1,2) \qquad (5.1)$$

Wij schrijven ook $R = \lambda P + \mu Q$.

(5.1) is de parametervoorstelling van 1.
Een vierde punt van 1 zij $S = \rho P + \sigma Q$.
Bepaling. De dubbelverhouding (RSPQ) is $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\sigma}{\rho}$

6. Bepaling. Zijn $\lambda 1 + \mu m = 0$ (n) en $\rho 1 + \sigma m = 0$ (p) twee lijnen uit de waaier, bepaald door 1 en m, dan is de dubbelverhouding

$$(nplm) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\sigma}{\rho}.$$

7. Zijn P,Q,R,S vier punten op 1 als in No. 5 en is $T(t_i)$ een punt buiten 1, dan zijn de vergelijkingen van TP en TQ:

$$m \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ en } n \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

De vergelijking van TR is

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \\ \lambda + \mu q_0 & \lambda p_1 + \mu q_1 & p_2 + q_2 \end{vmatrix} = 0$$

Deze vergelijking geven wij aan door $\lambda m + \mu n = 0$
Evenzo luidt de vergelijking van TS $\rho m + \sigma n = 0$
Nu is $(RSPQ) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\sigma}{\rho}$ en $(TR, TS, TP, TQ) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\sigma}{\rho}$.

Stelling. De dubbelverhouding van vier punten op een lijn of van vier lijnen verandert niet bij projecteren of snijden.

8. Laat op PQ vier punten gegeven zijn: $R_i = \lambda_i P + \mu_i Q$.
$(i = 1,2,3,4)$. Gevraagd $(R_3\ R_4\ R_1\ R_2)$.

Oplossing. $R_1 = \lambda_1 P + \mu_1 Q$ $R_2 = \lambda_2 P + \mu_2 Q$.

Hieruit volgt: $P = \frac{\mu_2}{\delta_{12}} R_1 - \frac{\mu_1}{\delta_{12}} R_2$ ($\delta_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i \\ \lambda_k & \mu_k \end{vmatrix}$

$$Q = -\frac{\lambda_2}{\delta_{12}} R_1 + \frac{\lambda_1}{\delta_{12}} R_2.$$

$R_3 = \lambda_3 P + \mu_3 Q = \frac{-\delta_{23}}{\delta_{12}} R_1 + \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}} R_2$

$R_4 = \lambda_4 P + \mu_4 Q = \frac{-\delta_{24}}{\delta_{12}} R_1 + \frac{\delta_{14}}{\delta_{12}} R_2$

$d = (R_3\ R_4\ R_1\ R_2) = \frac{\delta_{13}}{\delta_{23}} : \frac{\delta_{14}}{\delta_{24}} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_4 & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_4 & \mu_4 \end{vmatrix}}$.

Opmerking. Is $R_1 = R_2$ of (en) $R_3 = R_4$, dan is $d = 1$.
Is $R_1 = R_3$ of (en) $R_2 = R_4$, dan is $d = 0$.
Is $R_1 = R_4$ of (en) $R_2 = R_3$, dan is $d = \infty$
Vallen drie der punten samen, dan is d onbepaald.

9. Wij beschouwen weer vier punten P,Q,R,S.
$R = \lambda P + \mu Q$. $S = \rho P + \sigma Q$. $d = (RSPQ) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\sigma}{\rho}$.
Uit no. 8 volgt:

$$(PQRS) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \rho & \sigma \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho & \sigma \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = d \qquad (9.1)$$

$(SRPQ) = \frac{1}{d}$ (9.2)

$(RPSQ) = \frac{|\rho\ \sigma|}{|\rho\ \sigma|} : \frac{|\lambda\ \mu|}{|\lambda\ \mu|} = 1 - \alpha$. (9.3)

Vormen wij de 24 permutaties van de vier punten, dan ontstaan 24 dubbelverhoudingen, die vier aan vier gelijk zijn.

$(PQRS) = (RSPQ) = (QPSR) = (SRQP) = d$

$(SRPQ) = (PQSR) = (RSQP) = (QPRS) = \frac{1}{d}$

$(PRQS) = (QSPR) = (RPSQ) = (SQRP) = 1 - d$

$(RPQS) = (QSRP) = (PRSQ) = (SQPR) = \frac{1}{1-d}$

$(SPRQ) = (RQSP) = (PSQR) = (QRPS) = \frac{d-1}{d}$

$(PSRQ) = (RQPS) = (SPQR) = (QRSP) = \frac{d}{d-1}$

9. Valt R met S samen, dan is $d = 1$, dus de zes waarden(9.4) worden dan

$$1,1,0,\infty,0,\infty .$$

Heeft (PQRS) één der waarden $1,0,\infty$, dan vallen twee der punten samen. Wij onderzoeken nu, of op andere wijze twee der waarden (9.4) gelijk kunnen worden.

$d = \frac{1}{d}$ geeft $d = \pm 1$

$d = 1$: twee der punten vallen samen.

$d = 1$: de zes waarden zijn $-1, -1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$.

De puntenparen RS en PQ heten harmonisch.

$d = 1-d$ geeft $d = \frac{1}{2}$. PS en QR zijn harmonische paren.

$d = \frac{1}{1-d}$ geeft $d = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. De 6 waarden worden 3 aan 3 gelijk. Men noemt het puntenviertal aequi-anharmonisch.

$d = \frac{d-1}{d}$ geeft een aequi-anharmonisch viertal.

$d = \frac{d}{d-1}$ geeft $d = 0$ of $d = 2$. $d = 0$: twee punten vallen samen. $d = 2$: PR en QS zijn harmonische paren.

Opmerking. (9.2) is een bijzonder geval van de formule:

$$(A_1A_2PQ)\ (A_2A_3PQ)\ (A_3A_4PQ).....(A_{n-1}A_nPQ)\ (A_nA_1PQ) = 1$$

10. De punten $O_0(1,0,0)$, $O_1(0,1,0)$, $O_2(0,0,1)$ heten grondpunten, $E(1,1,1)$ het eenheidspunt; zij vormen samen het coördinatenstelsel. Laat $P(p_0,p_1,p_2)$ een willekeurig punt zijn O_0P snijdt O_1O_2 in $P_0(0,p_1,p_2)$. $P_0 = p_1O_1 + p_2O_2$.

Evenzo vindt men $E_0 = O_1 + O_2$. $(P_0E_0O_1O_2) = \frac{p_2}{p_1}$

Evenzo: $(P_1E_1O_2O_0) = \frac{p_0}{p_2}$

en: $(P_2E_2O_0O_1) = \frac{p_1}{p_0}$

11. Laat P,Q en R drie punten zijn, die niet op een rechte lijn liggen. Bij ieder punt X kan men λ , μ , ν vinden, zodat

$$x_i = \lambda p_i + \mu q_i + \nu r_i \quad (i = 0,1,2) \qquad (11.1)$$

Geeft men nog, dat voor S $\lambda = \mu = \nu = 1$, dan is voor ieder punt X de verhouding van λ , μ en ν bepaald; omgekeerd is door die verhouding het punt X bepaald. Men kan dus λ, μ , ν als coördinaten van X opvatten. Schrijft men (x_0', x_1', x_2') in plaats van (λ , μ , ν), dan vindt men de coördinatentransformatie:

$$\begin{aligned} x_0 &= p_0 x_0' + q_0 x_1' + r_0 x_2' \\ x_1 &= p_1 x_0' + q_1 x_q' + r_1 x_2' \qquad (11.2) \\ x_2 &= p_2 x_0' + q_2 x_1' + r_2 x_2' \end{aligned}$$

De cefficientendeterminant van deze transformatie is niet nul.
Voor de nieuwe coördinaten zijn de grondpunten P(1,0,0), Q(0,1,0) en R(0,0,1,); het eenheidspunt is S(1,1,1)

12. Ook de inverse transformatie van (11.2) is homogeen lineair. Hieruit volgt, dat ook op de nieuwe coordinaten de vergelijking van een rechte lijn homogeen lineair is.
Laat $A(a_i)$, $B(b_i)$, $C(c_i)$ drie punten van een rechte lijn zijn, zodat $c_i = \lambda a_i + \mu b_i$. Past men op elk der punten de coördinatentransformatie (11.2) toe, dan blijkt, dat $c_i' = \lambda a_i' + \mu b_i'$.
Uit de definitie No. 5 volgt nu:
Stelling. De dubbelverhouding van vier punten is invariant bij coordinatentransformatie.

Hoofdstuk 2

Het reële projectieve vlak

1. Alle letters stellen reële getallen voor.
Uit 1,(9.4) volgt, dat bij vier verschillende punten steeds twee van de 6 waarden der dubbelverhouding negatief zijn; deze behoren bij een bepaalde indeling der vier punten in twee paren.
Bepaling. Is $(PQRS) < 0$, dan zegt men, dat de paren PQ en RS elkander scheiden.
Stelling. Men kan de van P en Q verschillende punten van de lijn PQ zo in twee deelverzamelingen (segmenten) verdelen, dat twee punten van eenzelfde segment door P en Q niet gescheiden worden, twee punten van verschillende segmenten wel.
Bewijs: Zij $R = \lambda P + \mu Q$, $S = \rho P + \sigma Q$. $(PQRS) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\sigma}{\rho}$
$X = \alpha P + \beta Q$ behoort tot het ene segment, als $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, tot het andere als $\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

2. Stelling. Behoren R en S tot eenzelfde segment PQ, dan is één der segmenten RS een deel van één der segmenten PQ.

Bewijs: $\frac{\mu}{\lambda}$ en $\frac{\sigma}{\rho}$ (slot van No. 1) hebben gelijke tekens; wij zorgen dat λ en ρ positief zijn. Zijn nu γ en δ positief, dan is $\gamma\lambda + \delta\rho > 0$ en $\gamma\rho + \delta\sigma$ heeft hetzelfde teken als ρ en σ, dus $T = \gamma R + \delta S$ behoort tot hetzelfde segment PQ als R en S.

3. Is 1 een lijn en zijn P en Q twee punten buiten 1, dan zal één der segmenten PQ geen punt met 1 gemeen hebben. 1 verdeelt het vlak dus niet in twee delen.

Twee lijnen 1 en m verdelen de waaier, die zij bepalen, in twee segmenten. Hieruit volgt, dat zij het vlak in twee delen verdelen, zodanig dat twee punten uit eenzelfde deel verbonden kunnen worden door een lijnsegment, dat geheel in dat deel ligt, terwijl een gebroken lijn, die een punt van het ene deel- met het andere deel verbindt, minstens een punt met 1 of m gemeen heeft.

Drie lijnen, die niet door een punt gaan, verdelen het vlak in vier gebieden met analoge eigenschappen.

Neemt men de snijpunten der drie lijnen als grondpunten der drie lijnen als grondpunten, dan behoort bij ieder gebied een bepaalde tekencombinatie der coordinaten.

Hoofdstuk 3

Projectieve transformaties.

1. Bepaling. Een één-éénduidige betrekking tussen de punten van een lijn 1 en de punten van een lijn 1', waarbij steeds de dubbelverhouding van vier punten gelijk is aan de dubbelverhouding van hun beeldpunten, heet een projectieve betrekking tussen tussen 1 en 1'.

Stel, dat aan A,B,C,D op 1 toegevoegd zijn A',B',C',D' op 1'.

$$c_i = \lambda a_i + \mu b_i;\quad d_i = \rho a_i + \sigma b_i.$$

Men kan de coördinaten van A',B',C' zo normeren, dat

$$c'_i = \lambda a'_i + \mu b'_i;$$

uit (ABCD) = (A'B'C'D') volgt dan, dat de coordinaten van D' zo genormeerd kunnen worden, dat

$$d'_i = \rho a'_i + \sigma b'_i.$$

Stelling. Bij geschikte normering der coordinaten is voor alle waarden voor λ en μ aan het punt $\lambda A + \mu B$ toegevoegd het punt $\lambda A' + \mu' B'$.

De projectieve betrekking is door de beeldpunten van de drie punten bepaald.

2. Valt 1 met 1' samen, dan is $A' = pA + qB$ en $B' = rA + sB$, dus

$$\lambda A' + \mu B' = (p\lambda + r\mu)A + (q\lambda + s\mu)B.$$

$$\lambda' = p\lambda + r\mu$$

$$\mu' = q\lambda + s\mu \qquad \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.1)$$

Stelling. Een projectieve transformatie op een lijn l is gegeven door een homogeen lineaire transformatie tussen de parameters.

Ook de omgekeerde stelling geldt, want stellen wij $pA + qB = A'$ en $rA + sB = B'$, dan is aan $\lambda A + \mu B$ door (2.1) toegevoegd $\lambda A' + \mu B'$.

3. De bepaling en de stellingen uit No.1 en 2 zijn ook van toepassing op een projectieve betrekking tussen twee waaiers, die uit No.1 ook op een zodanige betrekking tussen een lijn en een waaier.

4. Bepaling. Een projectieve transformatie in het platte vlak is een transformatie, die 1°) iedere rechte lijn in een rechte lijn overvoert
2°) vier punten van een rechte lijn in vier punten met dezelfde dubbelverhouding overvoert.

5. Het beeldpunt van P duiden wij aan met P'. P' heeft in het stelsel $O_0'O_1'O_2'E'$ dezelfde coördinaten als P in $O_0O_1O_2E$, dus (p_0,p_1,p_2).
De coördinaten (p_0',p_1',p_2') van P' in het stelsel $O_0'O_1'O_2'E'$ worden volgens Hst. 1(11.2), blz.5, uit (p_0,p_1,p_2) verkregen door een homogene lineaire transformatie

$$\lambda x_i' = \sum_{k=0}^{2} a_{ik}x_k \qquad (i=0,1,2) \tag{5.1}$$

waarvan de coefficiëntendeterminant niet nul is.
Door de voorgaande redenering om te keren, ziet men in, dat iedere niet singuliere homogene lineaire transformatie een projectieve transformatie voorstelt.

De matrix $$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bepaalt de transformatie (5.1) volkomen.
Verkorte schrijfwijze: $\lambda x' = Ax$ (5.2)

6. Uit de algebra is bekend, dat de niet singuliere homogene transformaties in n veranderlijken een groep vormen. De projectieve transformaties op de rechte lijn vormen een groep; eveneens die in het platte vlak.

7. Een stelling behoort tot de projectieve meetkunde, als alle daarin optredende begrippen invariant zijn tegenover projectieve transformaties.

Hoofdstuk 4

Kegelsneden

1. Bepaling. Een kegelsnede is de meetkundige plaats der punten, waarvan de coördinaten voldoen aan een homogene vergelijking van de tweede graad:

$$f(x) \equiv a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{01}x_0x_1 = 0$$

of $$\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik}x_ix_k = 0 \tag{1.1}$$

2. De snijpunten van de kegelsnede $\mathcal{K}$ met de lijn $P_{\cdot}$ vindt men volgens Hst.1 No.5 uit

$$\sum a_{ik}(\lambda p_i - \mu q_i)(\lambda p_k + \mu q_k) = 0 \qquad \text{of:}$$

$$\lambda^2 \sum a_{ik}p_ip_k + 2\lambda\mu \sum a_{ik}p_iq_k + \mu^2 \sum a_{ik}q_iq_k = 0 \tag{2.1}$$

of:
$$\lambda^2 f(p) + 2\lambda\mu f(p;q) + \mu^2 f(q) = 0 \tag{2.2}$$

waarin
$$f(p;q) = \sum a_{ik}p_iq_k = \tfrac{1}{2}\sum p_i\frac{\partial f}{\partial q_i} = \tfrac{1}{2}\sum q_i\frac{\partial f}{\partial p_i}. \tag{2.3}$$

Opgave: Bewijs: $f(p;p) = f(p)$ (2.4)

Stelling. Iedere rechte lijn snijdt de kegelsnede in twee punten, die of reëel verschillend, of reëel samenvallend, of toegevoegd complex zijn.

Vraag: Wanneer liggen P en $\mathcal{P}$ harmonisch met de snijpunten S_1 en S_2 van $\mathcal{P}$ met $\mathcal{K}$?
Is $S_1 = \lambda_1 P + \mu_1 \mathcal{P}$, $S_2 = \lambda_2 P + \mu_2 \mathcal{P}$, dan zijn $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ en $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ de wortels van (2.1).
$(P\mathcal{P}S_1S_2) = -1$ als $\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = -1$, of $\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = 0$ of $f(p;q) = 0$ (3.1)

Bepaling. De punten P en $\mathcal{P}$ heten poolverwant ten opzichte van $\mathcal{K}$, als geldt $f(p;q) = 0$.
De meetkundige plaats der punten, die poolverwant zijn met $\mathcal{P}$, is de rechte lijn $f(p;x) = 0$ of $\sum a_{ik} p_i x_k = 0$
Zij heet de poollijn van $\mathcal{P}$.
Ligt $\mathcal{P}$ op de poollijn van P, dan ligt P op de poollijn van $\mathcal{P}$.
Bepaling. Vallen de beide snijpunten van l met $\mathcal{K}$ in P samen, dan heet l de raaklijn in P aan $\mathcal{K}$.
Opgave 1. De raaklijn in P aan $\mathcal{K}$ is de poollijn van P t.o.v. $\mathcal{K}$.
Opgave 2. Ligt P op zijn poollijn, dan ligt P op $\mathcal{K}$.
Op een rechte lijn is aan ieder punt P een punt P' toegevoegd, dat poolverwant is met P; omgekeerd is P aan P' toegevoegd.
De puntenparen P,P' vormen een involutie op l; deze kan beschouwd worden als de poolverwantschap t.o.v. het snijpuntenpaar (S_1,S_2) van l met $\mathcal{K}$.
Zijn S_1 en S_2 reëel, dan heet de involutie hyperbolisch, zijn zij toegevoegd complex, dan elliptisch.
Opgave 3. Is l een raaklijn, dan valt van elk puntenpaar één der punten in het raakpunt (ontaarde of parabolische involutie).
Opgave 4. Neem voor l de lijn O_1O_2 en voor O_1 en O_2 poolverwante punten. Bewijs nu, dat S_1 en S_2 voldoen aan een vergelijking van de vorm:
$ax_1^2 + bx_2^2 = 0$.
Opgave 5. Bepaal in de involutie op l (opg.4) het toegevoegde punt van $P(0,p_1,p_2)$.
Opgave 6. Leid uit opg.5 af: twee paren van een hyperbolische involutie scheiden elkaar niet; twee paren van een elliptische involutie scheiden elkaar wel. (zie Hst.2 No.1,blz.6)
Bepaling. Vallen op iedere lijn door P de beide snijpunten met $\mathcal{K}$ in P samen, dan heet P een dubbelpunt van $\mathcal{K}$.
Opgave 7. De nodige en voldoende voorwaarde, opdat P een dubbelpunt van $\mathcal{K}$ is, luidt:

$$\frac{\partial f}{\partial p_0} = \frac{\partial f}{\partial p_1} = \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0 \qquad (5.1)$$

Bewijs dit en schrijf deze vergelijkingen uit.
Opgave 8. Nodig en voldoende opdat $\mathcal{K}$ een dubbelpunt heeft is:

$$d = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.2)$$

Bepaling. d heet de discriminant van $\mathcal{K}$. De matrix, waarvan d de determinant is, heet de bij $\mathcal{K}$ behorende matrix A.
Heeft $\mathcal{K}$ één dubbelpunt P en is $\mathcal{P}$ een ander punt van $\mathcal{K}$, dan is $f(\lambda p + \mu q) = 0$ voor alle waarden van λ en μ, dus de hele lijn $P\mathcal{P}$ behoort tot $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ is ontaard in twee rechte lijnen door P.
Heeft A de rang 1, dan hebben de vergelijkingen (5.1) twee onafhankelijke oplossingen p_i en q_i; de algemene oplossing is $x_i = \lambda p_i + \mu q_i$.
Er is een rechte lijn van dubbelpunten, nl. de lijn $P\mathcal{P}$; $\mathcal{K}$ is ontaard in de dubbelgetelde lijn $P\mathcal{P}$.
Opgave 9. Een dubbelpunt van $\mathcal{K}$ is poolverwant met ieder punt van het vlak en omgekeerd.
Opgave 10. Bewijs dat een kegelsnede door een projectieve transformatie in een kegelsnede overgaat.

Opgave 11. Laat de projectieve transformatie gegeven zijn door $x_i = \sum s_{ik} x'_k$ of $x = Sx'$. Bewijs dan dat $f'(x') = \sum a'_{lm} x'_m x'_l$, waarin $a'_{lm} = \sum_{i,k} a_{ik} s_{il} s_{km}$.

Opgave 12. $A' = S^T A S$. (uit opg.11)

Opgave 13. Er zijn oneindig veel driehoeken, waarvan elke zijde de poollijn van het overstaande hoekpunt is. (Pooldriehoek).

Opgave 14. Is $O_0O_1O_2$ een pooldriehoek, dan heeft γ een vergelijking van de vorm $ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 = 0$, of $ax_0^2 + bx_1^2 = 0$ of $ax_0^2 = 0$.

Opgave 15. Door geschikte keuze van het eenheidspunt E (zo nodig imaginair) brengt men de vergelijking op één der vormen:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 & \text{(algemene kegelsnede)} \\ x_0^2 + x_1^2 = 0 & \text{(twee snijdende lijnen)} \\ x_0^2 = 0 & \text{(dubbellijn)} \end{cases} \qquad (6.1)$$

De transformatie op één der vormen (6.1) geschiedt door een homogene lineaire transformatie, die men ook als projectieve transformatie kan opvatten.

Bepaling. Twee kegelsneden, die door een projectieve transformatie uit elkaar ontstaan heten projectief aequivalent.

Opgave 16. Zijn twee kegelsneden ieder projectief aequivalent met een derde, dan zijn zij ook onderling projectief aequivalent.

Stelling. Iedere kegelsnede is projectief aequivalent met één der kegelsnede (6.1). (6.1) geeft dus een volledige projectieve indeling der kegelsneden. In het bijzonder zijn twee algemene kegelsneden projectief aequivalent.

7. Opgave 17. Door een reële keuze van E krijgt men één der vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 & \text{(nuldelige kegelsnede)} \\ x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 & \text{(eendelige kegelsnede)} \\ x_0^2 + x_1^2 = 0 & \text{(twee toegev.compl. lijnen)} \\ x_0^2 - x_1^2 = 0 & \text{(twee reële lijnen)} \\ x_0^2 = 0 & \text{(reële dubbellijn)} \end{cases}$$

Opgave 18. Geef de definitie van reëel projectief aequivalent. Bewijs het analogon van opg.16 en geef een volledige reëel-projectieve indeling der kegelsneden.

Opgave 19. Elke twee eendelige kegelsneden zijn op oneindig veel wijzen reëel-projectief aequivalent.

8. Bepaling. Een punt P ligt binnen de eendelige kegelsnede γ, als iedere lijn door P twee reële punten met γ gemeen heeft. P ligt buiten γ, als minstens een lijn door P geen reëel punt met γ gemeen heeft.

Opgave 20. Is $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ de vergelijking van γ, dan ligt O_2 binnen γ; O_0 en O_1 liggen buiten γ.

Opgave 21. Ligt P binnen γ, dan snijdt de poollijn p van P γ niet in reële punten. Ligt P buiten γ, dan heeft p twee reële punten met γ gemeen (uit opg.20).

Opgave 22. Laat $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ de vergelijking van γ zijn. Bepaal de poollijn van $P(p_i)$. Elimineer x_2 uit de vergelijkingen van γ en de poollijn. Onderzoek, wanneer de vierkantsvergelijking in $\frac{x_1}{x_0}$ reële wortels heeft. Leid hieruit en uit opg.21 af:

Stelling. P ligt binnen γ, als $p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 < 0$ en omgekeerd.

P ligt buiten γ, als $p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 > 0$ en omgekeerd.

or een coördinatentransformatie leiden we hieruit verder af:
elling. Is $f(x) = 0$ de vergelijking van γ, dan is in één der gebie-
n $f(x) > 0$, in het andere $f(x) < 0$.
gave 23. Liggen O_1 en O_2 op γ en is O_0 de pool van O_1O_2, dan is
de vergelijking van γ : $x_0^2 + ax_1x_2 = 0$.

Volgens hst.2 no.1 heeft $\frac{x_1}{x_2}$, dus ook x_1x_2 voor de punten van verschillende segmenten O_1O_2 verschillende tekens. De twee segmenten behoren dus tot verschillende gebieden.

9. Opdat P_λ een raaklijn aan γ is, moet (2.2) (blz.7) twee gelijke wortels $\mu:\lambda$ hebben, dus $f(p;q)^2 - f(p)f(q) = 0$ (9.1)

Opgave 24. Uit een punt buiten γ zijn de raaklijnen reëel, uit een punt binnen γ toegevoegd complex. (uit opg.21).

Hoofdstuk 5

Algebraische krommen.

1. Bepaling. Een algebraische kromme van de graad n is de meetkundige plaats van de punten, wier coördinaten aan een homogene algebraische vergelijking van de graad n voldoen.

Opgave 1. Twee algebraische krommen van de graden p en q vormen samen een (ontaarde) algebraische kromme van de graad $p+q$.

2. Om de snijpunten van de kromme met de lijn P_λ te bepalen, substitueren wij in haar vergelijking $x_i = \lambda p_i + \mu q_i$.

Er ontstaat een homogene vergelijking van de graad n in λ en μ. Bij iedere oplossing hiervan behoort een snijpunt. Is $\lambda_1 : \mu_1$ een k-voudige wortel, dan is k de multipliciteit van het bijbehorende snijpunt. De som der multipliciteiten van alle snijpunten van P_λ met de kromme is dus n.

3. Is R een meervoudig snijpunt van l met de kromme, dan is l de raaklijn in R. Zij $f(x_0,x_1,x_2) = 0$ de vergelijking van de kromme

$$f(\lambda r_i + \mu s_i) = \lambda^n f(r_i) + \lambda^{n-1}\mu \sum s_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + \tfrac{1}{2}\lambda^{n-2}\mu^2 \sum s_i s_k \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_k} + \dots$$

(Taylorreeks). Zij nu R een punt van de kromme, dus $f(r_i) = 0$.
S ligt op de raaklijn in R, als $\sum s_i \frac{\partial f}{\partial r_i} = 0$

De vergelijking van de raaklijn is dus $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial r_i} = 0$ (3.1)

4. Is $\frac{\partial f}{\partial r_0} = \frac{\partial f}{\partial r_1} = \frac{\partial f}{\partial r_2} = 0$, dan heeft iedere lijn door R in R een dubbeltellend snijpunt met γ.

Bepaling. Heeft iedere lijn door R in R een k-voudig snijpunt met γ, dan is R een k-voudig punt van γ.

Opgave 2. Stel de voorwaarde op, opdat R een k-voudig punt van γ is.

5. Opdat de raaklijn (3.1) door P gaat, is nodig en voldoende dat $\sum p_i \frac{\partial f}{\partial r_i} = 0$. De raakpunten liggen dus op de kromme $\sum p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, de eerste poolkromme van P t.o.v. γ. Deze gaat ook door eventuele meervoudige punten van γ.

Heeft γ geen meervoudige punten, dan heeft de eerste poolkromme van P $n(n-1)$ snijpunten met γ; uit een willekeurig punt kan men $n(n-1)$ raaklijnen aan γ trekken. Dit getal heet de klasse van γ. Heeft γ meervoudige punten, dan is de klasse kleiner dan $n(n-1)$.

Hoofdstuk 6
Lijncoördinaten.

1. **Bepaling.** Is $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2 = 0$ (1.1) de vergelijking van een lijn l, dan heten u_0,u_1,u_2 de coördinaten van l.

Opgave 1. l bepaalt de verhouding van zijn coördinaten en omgekeerd

2. l snijdt O_0O_1 in P_2, O_1O_2 in P_0, O_2O_0 in P_1, met $P_0(0,u_2,-u_1)$; $P_1(-u_2,0,u_0)$; $P_2(u_1,-u_0,0)$. Bewijs dit, alsook:
De "eenheidsrechte" $x_0+x_1+x_2 = 0$ snijdt O_0O_1, O_1O_2 en O_2O_0 resp. in $F_2(1,-1,0)$; $F_0(0,1,-1)$ en $F_1(-1,0,1)$.

Opgave 3. $(P_0F_0O_1O_2)=u_1:u_2$; $(P_1F_1O_2O_0)=u_2:u_0$; $(P_2F_2O_0O_1)=u_0:u_1$.

Opgave 4. Stelt men O_0O_1 voor door a_2, O_0P_0 door l_0, O_0F_0 door f_0, enz., dan wordt dit:
$(l_0f_0a_2a_1)=u_1:u_2.(l_1f_1a_0a_2)=u_2:u_0.(l_2f_2a_1a_0)=u_0:u_1.$ (1.2)

3. De betrekking (1.1) laat drie interpretaties toe:
a) u vast, x veranderlijk: vergelijking van een lijn.
b) x vast, u veranderlijk: de vergelijking van een lijnenwaaier(punt).
c) x en u veranderlijk: incidentievoorwaarde van punt en lijn.

4. Uit de symmetrie van de incidentievoorwaarde volgt het vlakke dualiteitsbeginsel: Komen in een stelling in de projectieve meetkunde geen andere meetkundige begrippen voor dan "punt", "lijn" en "incident", dan ontstaat weer een juiste stelling, wanneer men de woorden punt en lijn verwisselt.
Opgave 5. De formules (1.2) staan duaal tegenover die uit Hst.1 No.10 (blz.5).
Opgave 6. Noem en bewijs de duale stellingen van die uit Hst.1 Nos.2, 3,4,5 (blz.3).

5. Voeren wij een coördinatentransformatie uit (Hst.1,(11.2),blz.5):

$$x_i = \sum_{k=0}^{2} s_{ik}x'_k \quad \text{of} \quad x = Sx' \tag{5.1}$$

dan gaat (1.1) over in $\sum_i u_i \sum_k s_{ik}x'_k = 0$ of $\sum_k \sum_i s_{ik}u_i x'_k = 0$.

De coördinaten van l op het nieuwe stelsel zijn dus:

$$u'_k = \sum_i s_{ik}u_i \tag{5.2}$$

of $u' = S^Tu$; $u = (S^T)^{-1}u'$

Bepaling. De transformatie $(S^T)^{-1} = (S^{-1})^T$ heet contragredient met S.
Stelling. De lijncoördinaten transformeren zich contragrediënt met de puntcoördinaten.

6. Opgave 7. De coördinaten van de poollijn p van P t.o.v. de kegelsnede γ (zie Hst.4 No.3 blz.8) zijn

$$u_i = \sum a_{ik}p_k \; ; \quad u = Ap \tag{6.1}$$

Is γ niet ontaard, dan is $\det A \neq 0$, dus is $p_i = \sum r_{ik}u_k$ (6.2)
$p = Iu = A^{-1}u$

P ligt op γ en p raakt aan γ, als:
$\sum p_iu_i = 0$, dus $\sum a_{ik}p_ip_k = 0$ (6.3) of $\sum m_{ik}u_iu_k = 0$ (6.4)

(6.3) is de vergelijking van γ op puntcoördinaten, (6.4) de vergelijking van γ op lijncoördinaten.
Stelling. De verzameling der raaklijnen van een niet-ontaarde kegelsnede staat duaal tegenover de verzameling der punten van een niet-ontaarde kegelsnede.

Opgave 8. Bepaal de duale stellingen bij Hst.4 Nos.2,3,5,6,7.

7. Opgave 9. Een ontaarde lijnkegelsnede bestaat uit twee al of niet samenvallende waaiers.
Voor ontaarde kegelsneden geldt de stelling uit No.6 dus niet.

Hoofdstuk 7

Affiene Meetkunde.

1. Bepaling. Het affiene vlak is de verzameling der punten van het projectieve vlak, die buiten een gegeven lijn ω vallen.
ω heet de oneigenlijke lijn. Twee lijnen, die elkaar op ω snijden heten evenwijdig.
Een affiene transformatie is een projectieve transformatie, die ω invariant laat.
Opgave 1. De affiene transformaties vormen een groep.
Tot de affiene meetkunde behoren al die begrippen, die bij affiene transformatie invariant blijven.
Opgave 2. Evenwijdig is een affien begrip.

2. Een affien coördinatenstelsel is een projectief coördinatenstelsel, waarin ω de vergelijking $x_0 = 0$ heeft. Wij schrijven O,X,Y voor O_0,O_1,O_2 en we normeren de coördinaten zo, dat overal $x_0 = 1$, dan heten x_1 en x_2 de affiene coördinaten van X.
Opgave 3. Leid uit Hst.1 No.10,blz.5 de meetkundige betekenis van de affiene coördinaten af.
Opgave 4. Op een affien assenstelsel krijgt een affiene transformatie de gedaante:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

(zie Hst.3,(5.1) blz.7)

3. Opgave 5. Is P een gewoon punt en A een oneigenlijk punt, dan is de parametervoorstelling van PA:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \lambda a_1 \\ x_2 &= p_2 + \lambda a_2 \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

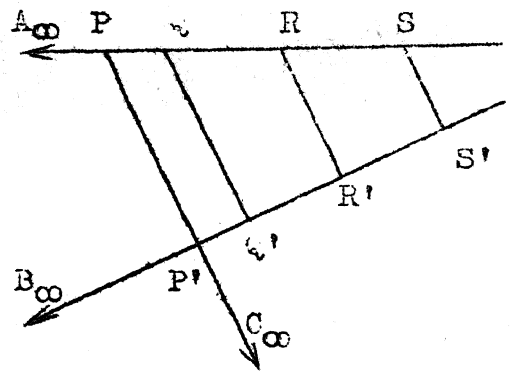
Bepaling. Is $BC /\!/ DE$, $c_i = b_i + \lambda a_i$, $e_i = d_i + \mu b_i$, dan is $\frac{BC}{DE} = \frac{\lambda}{\mu}$.

Opgave 6. $\frac{BC}{CB} = -1$.

Opgave 7. Liggen B,C,D,E,F op een rechte lijn, dan is $\frac{DE}{BC}\,\frac{EF}{BC} = \frac{DF}{BC}$.

Opgave 8. Is $BC /\!/ DE /\!/ FG$, dan is $\frac{BC}{DE}\,\frac{DE}{FG} = \frac{BC}{FG}$.

Stelling. De verhouding van twee lijnstukken op een lijn verandert niet bij parallel-projectie op een andere lijn.



Gegeven: $q_i = p_i + \lambda a_i$ $\quad s_i = r_i + \mu a_i$

$q_i' = p_i' + \lambda' a_i$ $\quad s_i' = r_i' + \mu' b_i$

$p_i' = p_i + \nu c_i$ $\quad q_i' = q_i + \rho c_i$

$r_i' = r_i + \sigma c_i$ $\quad s_i' = s_i + \tau c_i$

Te bewijzen: $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}$.

Bewijs: De vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} (\rho - \nu)z &= \lambda' y - \lambda x \\ (\tau - \sigma)z &= \mu' y - \mu x \end{aligned}\right\}$$

hebben twee onafhankelijke oplossingen (a_1,b_1,c_1) en (a_2,b_2,c_2), want $C_\infty \neq A_\infty$, dus $\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{a_1}{a_2}$. Hieruit volgt het gestelde.

4. Opgave 9. Liggen B,C,D op een rechte lijn met het oneigenlijke punt A, dan is $\frac{BD}{CD} = (BCDA)$.

Opgave 10. Liggen B,C,D,E op een rechte lijn, dan is $(BCDE) = \frac{BD}{CD} : \frac{BE}{CE}$.

Opgave 11. Is in opg.9 (BCDA) = -1, dan is D het midden van BC.

5. Opgave 12. Welke stellingen uit de affiene meetkunde ontstaan, wanneer in de figuur der stelling van Desargues een of meer punten oneigenlijk zijn?

Opgave 13. Geef een direct bewijs van één of meer der stellingen uit opg.12. Leid hieruit weer de stelling van Desargues af.

Opgave 14. Liggen P,Q en R op l en P',Q',R' op l', en is $PQ' \parallel P'Q$, $PR' \parallel P'R$, dan is $QR' \parallel Q'R$.
Bewijs dit. Welke stelling uit de projectieve meetkunde volgt hieruit?

6. Een kegelsnede γ wordt in affiene coördinaten gegeven door een (al of niet homogene) vergelijking van de tweede graad.

Opgave 15. Raakt γ niet aan ω, of is γ ontaard, dan kan men voor OXY een pooldriehoek kiezen. De vergelijking van γ krijgt één der vormen:

$$ax_1^2 + bx_2^2 + c = 0$$

$$ax_1^2 + bx_2^2 = 0$$

(zie Hst.4, opg.15, blz.9)

$$ax_1^2 + c = 0$$

$$ax_1^2 = 0$$

Opgave 16. Raakt γ in A aan ω, dan kiezen wij X in A, O op γ en OY langs de raaklijn in O aan γ. De vergelijking wordt:

$$ax_2^2 + bx_1 = 0$$

Opgave 17. Door geschikte reële keuze van _ brengen wij de vergelijking van γ uit opg.15 en 16 op één der vormen:

a) $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ (nuldelig)

b) $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (ellips)

c) $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ (hyperbool)

d) $x_1^2 + x_2^2 = 0$

e) $x_1^2 - x_2^2 = 0$

f) $x_1^2 + 1 = 0$

g) $x_1^2 - 1 = 0$

h) $x_1^2 = 0$

i) $x_2^2 - 2x_1 = 0$ (parabool)

d),e),f),g),h) stellen ontaardingen voor. Welke?

Opgave 18. In opg.17 is een volledige reëel-affiene indeling der kegelsneden gegeven. Definieer dit begrip en toon de bewering aan.

Opgave 19. Karakteriseer elk der drie niet-ontaarde eendelige kegelsneden door zijn ligging ten opzichte van ω.

7. Bepaling. De raaklijn in een oneigenlijk punt van een kegelsnede heet een asymptoot.

Opgave 20. Bepaal de asymptoten van elk der kegelsneden uit opg.17.

Bepaling. De pool van ω ten opzichte van γ heet het middelpunt van γ. De poollijn van een oneigenlijk punt heet een middellijn.

Opgave 21. Verklaar deze benamingen.

Opgave 22. Iedere middellijn gaat door het middelpunt.
De asymptoten gaan door het middelpunt.

Opgave 23. De meetkundige plaats van de middens van een stel evenwijdige koorden is een middellijn; de toegevoegde middellijn van dat stelsel.

Opgave 24. Bepaal van elk der kegelsneden uit opg 17 het middelpunt en de middellijnen.

8. Bepaling. Een kegelsnede, die één eigenlijk middelpunt M bezit heet middelpuntskegelsnede.
Bepaling. Deelt de middellijn p_1 van een middelpuntskegelsnede de koorden, evenwijdig aan de middellijn p_2, middendoor, dan heten p_1 en p_2 toegevoegde middellijnen.
Opgave 25. Zijn P_1 en P_2 de oneigenlijke punten van p_1 en p_2, dan is MP_1P_2 een pooldriehoek van) .
Opgave 26. De paren toegevoegde middellijnen van) snijden op ω een involutie uit; zij vormen een straleninvolutie. (zie Hst.4, no.4, blz.8)
Opgave 27. Is O = M, X = P_1, Y = P_2 (opg.26), dan heeft de vergelijking één der vormen: $\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} = \pm 1$; $\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} = 0$
Wat is de meetkundige betekenis van a en b?
Opgave 28. $x_2 = mx_1$ en $x_2 = m'x_1$ zijn toegevoegde middellijnen, als $mm' = \pm \frac{b^2}{a^2}$.

9. Opgave 29. Alle middellijnen van een parabool zijn evenwijdig.
Opgave 30. Bepaal de toegevoegde middellijn van de koordenrichting $x_2 = mx_1$ ten opzichte van de parabool $x_2^2 = 2px_1$.

10. Laat men een bepaald affien stelsel een speciale rol spelen als "rechthoekig Cartesisch stelsel", dan kan men de begrippen "lengte" en "hoekmaat" definieren. Deze behoren niet tot de affiene meetkunde. De transformaties, die alle lengten en hoekmaten onveranderd laten, heten verplaatsingen.
De groep der verplaatsingen ligt ten grondslag aan de metrische meetkunde.

11. Op een Cartesisch stelsel vormen de paren onderling loodrechte lijnen door O een straleninvolutie; deze snijdt op ω de orthogonale involutie uit. De dubbelpunten van de orthogonale involutie zijn de (toegevoegd complexe) isotrope punten of cirkelpunten, I en J.
Geeft men in het projectieve vlak de punten I en J, of de orthogonale involutie, dan is het begrip "loodrechte stand" gegeven, dus ook het begrip "cirkel"(als meetkundige plaats der punten, waaruit een gegeven lijnstuk onder een rechte hoek gezien wordt.) Men kan dus lengten van lijnstukken vergelijken; na keuze van een eenheid van lengte is een metriek vastgelegd. Op deze wijze kan de metrische meetkunde als onderdeel van de projectieve meetkunde behandeld worden.

12. Stellingen van Apollonius.
Door de transformatie $x_1 = ax_1'$, $x_2 = bx_2'$ (1)
Wordt de ellips $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ (2) afgebeeld op de cirkel $x_1'^2 + x_2'^2 = 1$ (3)
Zijn $P(p_1,p_2)$ en $Q(q_1,q_2)$ uiteinden van toegevoegde middellijnen van (2), dan zijn OP' en OQ' onderling loodrechte stralen van (3). Laat de loodlijnen P'R' en Q'S' op OX_1 neer. $\triangle OP'R' \cong \triangle Q'OS'$, dus $|p_1'| = |q_2'|$ en $|p_2'| = |q_1'|$; men kan zorgen, dat $p_1' = q_2'$, $p_2' = -q_1'$

$p_1'^2 + q_1'^2 = p_1'^2 + p_2'^2 = 1$ $\qquad$ $p_1^2 + q_1^2 = a^2$

$p_2'^2 + q_2'^2 = q_1'^2 + q_2'^2 = 1$ $\qquad$ $p_2^2 + q_2^2 = b^2$

$OP^2 + OQ^2 = a^2 + b^2$

$p'_1q'_2 - p'_2q'_1 = p'^2_1 + q'^2_1 = 1$ $\qquad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = \pm ab$

Opgave 31. Breng de twee stellingen in woorden.

Hoofdstuk 8

Bundels kegelsneden

1. Twee kegelsneden in een plat vlak hebben òf 4, òf oneindig veel punten gemeen. In het laatste geval moeten zij òf samenvallen, òf beide moeten zodanig ontaarden, dat zij een rechte lijn gemeen hebben.
Hieruit volgt: Door 5 punten, waarvan geen vier op een rechte lijn liggen gaat één en slechts één kegelsnede.
Opgave 1. Stel de vergelijking van de kegelsnede door 5 gegeven punten op.

2. Door 4 punten, die niet op een rechte liggen, gaan oneindig veel kegelsneden, die een bundel vormen.

Zijn $f(x) \equiv \sum a_{ik}x_ix_k = 0$ en $g(x) \equiv \sum b_{ik}x_ix_k = 0$ (1)

de vergelijkingen van twee exemplaren van de bundel, dan is $\lambda f + \mu g = 0$ de vergelijking van een willekeurig exemplaar uit de bundel.
Deze definitie van bundel is niet meer bruikbaar, als de twee gegeven kegelsneden elkaar raken. Wij definieren meer algemeen: Een bundel kegelsneden is de verzameling kegelsneden, wier vereglijkingen de vorm $\lambda f + \mu g = 0$ (2) hebben.

3. Snijdt men de kegelsnede $\lambda f + \mu g = 0$ met de lijn $x_0 = 0$, dan vindt men:

$\lambda(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \mu(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0$ (3)

(3) stelt voor iedere verhouding $\lambda : \mu$ een puntenpaar voor; al deze puntenparen vormen een bundel puntenparen.

4. Een goed hulpmiddel voor de studie van de meetkunde der puntenparen op een rechte lijn l is de volgende afbeelding. Aan het puntenpaar met vergelijking $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ wordt toegevoegd het punt (a_1, a_2, a_3) van het vlak Π (Afbeelding van Hesse). Het beeldpunt in Π van het punten-paar P, Q op l stellen wij voor door (P, Q)
Opgave 2. Een bundel puntenparen op l wordt afgebeeld op een rechte lijn van Π.
Opgave 3. Een paar samenvallende punten op l wordt afgebeeld op een punt van de kegelsnede ω $(a_1a_3 - a_2^2 = 0)$ in Π.

Laat het puntenpaar P, Q op l voorgesteld worden door:
$f(x) \equiv a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 = 0$ en het puntenpaar R,S door:

$g(x) \equiv b_1x_1^2 + 2b_2x_1x_2 + b_3x_2^2 = 0$. De puntenparen zijn harmonisch, als R en S poolverwant zijn ten opzichte van het puntenpaar P, Q, dus als $f(r;s) = 0$ of $a_1r_1s_1 + a_2(r_1s_2 + r_2s_1) + a_3r_2s_2 = 0$ (4). Nu zijn $r_1:r_2$ en $s_1:s_2$ de wortels van $b_1(x_1:x_2)^2 + 2b_2(x_1:x_2) + b_3 = 0$, dus $r_1s_1:r_2s_2 = b_3:b_1$ en $\frac{r_1}{r_2} + \frac{s_1}{s_2} = -\frac{2b_2}{b_1}$ of $\frac{r_1s_2 + r_2s_1}{r_2s_2} = -\frac{2b_2}{b_1}$. Substitutie in (4) geeft: $a_1b_3 - 2a_2b_2 + a_3b_1 = 0$ (5).

Opgave 4. De puntenparen P, Q en R,S op l zijn harmonisch, als de punten (PQ) en (RS) van Π poolverwant zijn t.o.v. ω.
Opgave 5. De involutie met dubbelpunten A,B wordt afgebeeld op de poollijn van (AB) t.o.v. ω.
Opgave 6. Iedere bundel puntenparen is een involutie en omgekeerd.
Opgave 7. De raakpunten van de raaklijnen uit (AB) aan ω zijn de punten (AA) en (BB).

Opgave 8. Een punt buiten ω stelt een paar reële punten van l voor, een punt binnen ω een paar toegevoegd complexe punten van l.
Opgave 9. Bepaal met behulp van de afbeelding het gemeenschappelijk paar van twee involuties; ga na, wanneer dit uit reële punten bestaat.
Opgave 10. De kegelsneden van een bundel snijden een willekeurige lijn in de puntenparen van een involutie (uit opg.6).
Opgave 11. Aan een willekeurige lijn raken twee exemplaren van een kegelsnedenbundel.

5. De voorwaarde, opdat de kegelsnede (2) ontaardt, luidt:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{00}+\mu b_{00} & \lambda a_{01}+\mu b_{01} & \lambda a_{02}+\mu b_{02} \\ \lambda a_{10}+\mu b_{10} & \lambda a_{11}+\mu b_{11} & \lambda a_{12}+\mu b_{12} \\ \lambda a_{20}+\mu b_{20} & \lambda a_{21}+\mu b_{21} & \lambda a_{22}+\mu b_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

De bundel bevat dus drie ontaardingen (misschien samenvaalend) of alle exemplaren zijn ontaard; het laatste geval sluiten wij uit.
Is $\lambda_1:\mu_1$ een oplossing van (6), dan volgt het dubbelpunt van de ontaarding uit de vergelijkingen met coefficientendeterminant (6):

$$\sum_{k=0}^{2} (\lambda_1 a_{ik}+\mu_1 b_{ik})x_k = 0 \quad (i = 0,1,2) \qquad (7)$$

6. De poollijnen van P t.o.v. de kegelsneden uit de bundel (2) vormen de lijnenwaaier $\lambda f(x;p)+\mu g(x;p) = 0$.
P heeft t.o.v. alle kegelsneden (2) dezelfde poollijn, als

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} : \frac{\partial g}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial g}{\partial x_2} = k. \qquad (8)$$

Opgave 12. (8) is hetzelfde als (7), wanneer men k vervangt door $-\mu_1:\lambda_1$.
Opgave 13. De dubbelpunten der ontaardingen uit de bundel zijn dezelfde punten als diegene, die t.o.v. alle kegelsneden uit de bundel dezelfde poollijn hebben.

7. I. Algemene bundel, 4 verschillende basispunten A,B,C,D.
Ontaardingen: de paren overstaande zijden van de volledige vierhoek ABCD.
Opgave 14. De paren overstaande zijden van een volledige vierhoek snijden een willekeurige lijn l in drie puntenparen van een involutie (uit opg.10).
Opgave 15. Wat volgt uit opg.14, als l een diagonaal van de volledige vierhoek ABCD is?
Opgave 16. Ga na, in hoeverre de figuur, bestaande uit de volledige vierhoek ABCD met zijn diagonaaldriehoek, reëel is in elk der volgende gevallen:
a) A en B reëel, C en D toegevoegd complex.
b) A en B toegevoegd complex, C en D toegevoegd complex.
Metrisch bijzondere gevallen: cirkelbundels met reële of toegevoegd complexe basispunten.

8. Opgave 17. Bepaal in elk der volgende gevallen II-V de ontaardingen en eventuele gemeenschappelijke pooldriehoeken.
II. De basiskegelsneden γ en δ raken elkaar in O_0 en snijden elkaar in O_1 en O_2.

$a_{12}x_1x_2+a_{20}x_2x_0+a_{01}x_0x_1 = 0$ (γ) en
$b_{12}x_1x_2+b_{20}x_2x_0+b_{01}x_0x_1 = 0$ (δ) raken elkaar in O_0, als
$a_{20}:b_{20} = a_{01}:b_{01}$.
Bundelvergelijking: $\lambda x_0(x_1+x_2)+\mu x_1x_2 = 0$.
Metrisch bijzonder geval: bundel rakende cirkels.
III. γ en δ raken elkaar in O_1 en O_2. Neem voor O_0 de pool van O_1O_2.
Bundelvergelijking: $\lambda x_1x_2+\mu x_0^2 = 0$.
Affien bijzonder geval: hyperbolen met gegeven asymptoten.
Metrisch bijzonder geval: concentrische cirkels.

IV. γ en δ osculeren elkaar in O_0 en snijden elkaar in O_1. Door keuze van O_2 en E: $x_0x_1 - x_2^2 = 0$ (γ)

$$b_{22}x_2^2 + 2b_{01}x_0x_1 + 2b_{12}x_1x_2 = 0 \quad (\delta)$$

Vermenigvuldig (δ) met x_0 en vervang x_0x_1 door x_2^2

$$b_{22}x_0x_2^2 + 2b_{01}x_0x_2^2 + 2b_{12}x_2^3 = 0.$$

Drie snijpunten vallen in O_0, als $b_{22} + 2b_{01} = 0$.

Bundelvergelijking: $\lambda(x_0x_1 - x_2^2) + \mu x_1x_2 = 0$.

V. γ en δ raken elkaar vierpuntig in O_0.

$$x_0x_1 - x_2^2 = 0 \quad (\gamma)$$

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{01}x_0x_1 + 2b_{12}x_1x_2 = 0 \quad (\delta)$$

Vermenigvuldig (δ) met x_0^2 en vervang x_0x_1 door x_2^2

$$b_{11}x_2^4 + b_{22}x_0^2x_2^2 + 2b_{01}x_0^2x_2^2 + 2b_{12}x_0x_2^3 = 0$$

Vier snijpunten vallen in O_0, als $b_{22} + 2b_{01} = 0$, $b_{12} = 0$.

Bundelvergelijking: $\lambda(x_0x_1 - x_2^2) + \mu x_1^2 = 0$.

9. Opgave 18. Bewijs de metrische stelling:
Bevat een bundel kegelsneden een cirkel, dan lopen de assen van alle exemplaren evenwijdig.
(1° bewijs: elementair. 2° bewijs: met de afbeelding van Hesse)
Toepassing: Bevat bundel IV een cirkel, dan is dit de osculatiecirkel in O_0 aan γ. Ontaarding: raaklijn in O_0 met O_0O_1. Assen hiervan: de bissectrices. Deze lopen // de assen van γ.
Opgave 19. Leid hieruit een constructie af voor de osculatiecirkel in een punt van een kegelsnede.

10. Duaal tegenover een bundel kegelsneden staat een schaar kegelsneden.
Opgave 20. Hoe luidt de vergelijking van een schaar in lijncoördinaten?
Opgave 21. Hoeveel exemplaren van een schaar gaan door een punt?
Opgave 22. De algemene schaar bestaat uit alle kegelsneden, die aan 4 gegeven lijnen raken. Bepaal de ontaardingen uit deze schaar en de gemeenschappelijke pooldriehoek.
Opgave 23. De niet ontaarde kegelsneden van een bundel in geval III of V vormen tevens de niet ontaarde kegelsneden van een schaar. (Stel de vergelijking in lijncoördinaten als bij de bundelvergelijking op). Geldt dit ook voor de ontaarde exemplaren?

11. Een metrisch bizonder geval van een schaar heeft men, als een der exemplaren het paar cirkelpunten is.
Opgave 24. Stel de schaarvergelijking op met als tweede basisexemplaar de ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Opgave 25. Bewijs dat alle exemplaren van de schaar dezelfde brandpunten hebben (confocale schaar).
Opgave 26. Welke typen van kegelsneden kunnen in de schaar voorkomen?
Opgave 27. De twee exemplaren van de schaar, die door een punt P gaan, snijden elkaar loodrecht.
Opgave 28. Wat is de vergelijking van de confocale schaar, waartoe de parabool

$$y^2 = 2px$$

behoort? Maak ook hiervoor opg. 25, 26 en 27.

Hoofdstuk 9

De projectieve ruimte.

1. Bepaling. Onder een punt van de projectieve ruimte verstaat men de verhouding van vier getallen (x_0,x_1,x_2,x_3), die niet alle nul zijn.

   Opgave 1. Breng deze bepaling nauwkeuriger in woorden, als in Hst.1, no.1.

2. Bepalingen. Onder een plat vlak verstaan wij de verzameling van alle punten, waarvan de coördinaten voldoen aan een homogene vergelijking van de eerste graad.
   Zijn P en Q twee verschillende punten, dan is de rechte lijn PQ de verzameling der punten, wier coördinaten in de vorm $x_i = \lambda p_i + \mu q_i$ geschreven kunnen worden.
   Opgave 2. Wat is de voorwaarde opdat drie punten P,Q,R op een rechte lijn liggen?
   Opgave 3. De punten P,Q,R liggen niet op een rechte lijn. Bepaal de vergelijking van het vlak PQR.
   Opgave 4. Ga met behulp van de algemene theorie der lineaire vergelijkingen na, welke ligging 2,3 of 4 vlakken in de ruimte kunnen hebben.

3. Bepaling. De verzameling der vlakken door een lijn heet een vlakkenwaaier. De verzameling der vlakken door een punt heet een vlakkenschoof.
   Opgave 5. Stel naar analogie van Hst.1 no4 de vergelijkingen van een vlakkenwaaier of een vlakkenschoof op.
   Opgave6. Definieer de dubbelverhouding van vier vlakken uit een waaier en bewijs, dat deze invariant is bij snijding met een plat vlak of een rechte lijn.
   Opgave 7. Geef, naar analogie met Hst.1 no.10 een meetkundige betekenis aan de coördinaten van een punt.

4. Opgave 8. Liggen de punten P, Q en R niet op een rechte lijn, dan is een parametervoorstelling van vlak PQR: $x_i = \lambda p_i + \mu q_i + \nu r_i$.

   Opgave 9. Hoe luiden de formules voor een coördinatentransformatie in de ruimte? (Hst.1 no.11)

5. Opgave 10. De reële ruimte wordt door een plat vlak niet in twee delen verdeeld.
   Opgave 11. Vier vlakken, die niet door een punt gaan, verdelen de ruimte in acht gebieden. Twee punten in eenzelfde gebied kunnen verbonden worden door een lijnsegment, dat geheel in dat gebied ligt. Elke gebroken lijn, die twee punten uit verschillende gebieden verbindt, heeft met minstens een der vier vlakken een punt gemeen.

6. De theorie der projectieve transformaties uit Hoofdstuk 3 kan zonder moeite tot de ruimte worden uitgebreid.

Hoofdstuk 10

Kwadrieken.

1. Bepaling. Een kwadriek is de meetkundige plaats der punten, waarvan de coördinaten voldoen aan een homogene vergelijking van de tweede graad: $f(x) \equiv \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}x_ix_k = 0.$

2. Hoe bepaalt men de snijpunten van de lijn PQ met de kwadriek Γ ? Laat zien, dat Hst.4 no.2 ook voor de ruimte geldt.

3. Opgave 2. Geef de definitie van poolverwante punten ten opzichte van Γ. Stel de voorwaarde op, opdat P en Q poolverwant zijn t.o.v. Γ.
   Opgave 3. De meetkundige plaats der punten, die met P poolverwant zijn t.o.v. Γ, is een plat vlak, het poolvlak van P. Stel de vergelijking van dit vlak op.
   Opgave 4. De poolvlakken van de punten van een lijn l vormen een vlakkenwaaier met drager l'. Ieder punt van l is poolverwant met ieder punt van l'.
   Bepaling. Twee lijnen met laatstgenoemde eigenschap heten wederkerige poollijnen t.o.v. Γ.

4. Bepaling: Een lijn waarvan de snijpunten met Γ in P samenvallen, heet een raaklijn in P aan Γ.

Opg. 5. Laat P een punt van Γ zijn. Stel de voorwaarde op, waaraan Q moet voldoen, opdat PQ in P aan Γ raakt.

Opg. 6. De meetkundige plaats der raaklijnen in P aan Γ is een plat vlak, dat met het poolvlak van P t.o.v. Γ samenvalt.

Opg. 7. Stel de voorwaarde op, opdat PQ een raaklijn aan Γ is; leid hieruit af, dat de meetkundige plaats van de raaklijnen uit P aan Γ, als P niet op Γ ligt, een kwadratische kegel is.

Bepaling: Het in opg. 5 bedoelde vlak heet het raakvlak in P aan Γ.

Opg. 8. Een willekeurig vlak snijdt Γ volgens een kegelsnede. Is het vlak een raakvlak, dan is de snijkegelsnede ontaard, en omgekeerd.

5. Bepaling: Vallen op iedere lijn door P de beide snijpunten met Γ in P samen, dan heet P een dubbelpunt van Γ.

Opg. 9. Aan welke vergelijkingen moeten de coördinaten van P voldoen, opdat P een dubbelpunt van Γ is?

Opg.10. Aan welke betrekking moeten de coëfficiënten a_{ik} voldoen, opdat Γ een dubbelpunt bezit?

Bepaling: De matrix A met de elementen a_{ik} heet de bij Γ behorende matrix; det. A is de discriminant van Γ.

Opg.11. Heeft A de rang 3, dan heeft Γ één dubbelpunt P; Γ is een kegel met top P.

Opg.12. Heeft A de rang 2, dan is Γ ontaard in twee snijdende vlakken.

Opg.13. Heeft A de rang 1, dan is Γ ontaard in twee samenvallende vlakken.

Opg.14. Geef de definitie van een poolviervlak van Γ en bewijs, dat iedere kwadriek oneindig veel poolviervlakken bezit.

Opg.15. Ga na, welke betrekkingen tussen de coëfficiënten a_{ik} moeten bestaan, opdat Γ aan de volgende voorwaarden voldoet:

a) Γ gaat door O_0

b) Γ gaat door de vier hoekpunten van het coördinatenviervlak.

c) Het poolvlak van O_0 is $O_1O_2O_3$.

d) $O_0O_1O_2O_3$ is poolviervlak van Γ.

e) O_0 is dubbelpunt van Γ.

f) Γ gaat door O_0O_1.

g) Γ gaat door O_0O_1, O_0O_2, O_1O_3 en O_2O_3.

h) Γ raakt in O_0 aan O_0O_1.

i) Γ raakt in O_0 aan $O_0O_1O_2$.

6. Opg. 16. maak een volledige projectieve indeling van de kwadrieken.

Opg. 17. Een reële kwadriek kan door een reële projectieve transformatie in een der volgende overgevoerd worden:

a) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ nuldelige kwadriek

b) $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ eendelige kwadriek

c) $-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 0$

d) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ nuldelige kegel

e) $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ eendelige kegel

f) $x_0^2 + x_1^2 = 0$ twee toegevoegd complexe vlakken

g) $-x_0^2 + x_1^2 = 0$ twee reële vlakken

h) $x_0^2 = 0$ reëel dubbelvlak.

7. Onderscheid tussen geval b) en geval c).

Aan c) is voldaan, als

$$\begin{aligned} \lambda(x_0 + x_2) &= \mu(x_3 + x_1) \\ \mu(x_0 - x_2) &= \lambda(x_3 - x_1) \end{aligned} \qquad (9.1)$$

Dit stelt oneindig veel rechte lijnen voor, die op de kwadriek liggen. Een tweede stelsel wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \rho(x_0 + x_3) &= \sigma(x_2 + x_1) \\ \sigma(x_0 - x_3) &= \rho(x_2 - x_1) \end{aligned} \qquad (9.2)$$

Opg. 18. Een lijn uit (9.1) en een lijn uit (9.2) snijden elkaar. Twee lijnen uit (9.1) kruisen elkaar; eveneens twee lijnen uit (9.2).

Opg. 19. Door ieder punt P van de kwadriek c) gaat één lijn van (9.1) en één lijn van (9.2). Deze vormen samen de doorsnede van het raakvlak in P met de kwadriek.

In het punt Q(1,1,0,0) van de kwadriek b) is het raakvlak $x_0 = x_1$; voor de punten van de doorsnede geldt $x_2^2 + x_3^2 = 0$, zodat deze uit twee toegevoegd complexe lijnen bestaat. Zou nu op kwadriek b) een reële lijn l liggen, dan zou vlak Ql de kwadriek snijden volgens l en nog een reële lijn door Q, wat niet kan.

Stelling: Kwadriek b) bevat geen reële rechte lijnen; kwadriek c) bevat twee stelsels rechte lijnen, waarvan elk de kwadriek overdekt.

8. Opg. 20. Geef naar analogie van hst. 4 no. 8 (blz. 9) de definitie van het binnen-en buitengebied van een eendelige kegel en bewijs met behulp van de daar bewezen eigenschappen, dat analoge stellingen voor de kegel gelden.

Opg. 21. De definitie van binnen- en buitengebied is ook bruikbaar voor een eendelige kwadriek.
Bij de kwadriek b) ligt O_0 binnen de kwadriek; O_1, O_2 en O_3 liggen er buiten.

Opg. 22. Ligt in geval b) P buiten Γ, dan snijdt het poolvlak π van P de kwadriek Γ volgens een eendelige kegelsnede; ligt P binnen Γ, dan volgens een nuldelige kegelsnede.
Dus ligt P buiten Γ, dan is de raakkegel K uit P aan Γ eendelig. Uit een punt buiten K kan men twee verschillende raakvlakken aan K, dus aan Γ brengen; dit punt kan dus niet op Γ liggen.

Stelling: Is in geval b) K een eendelige raakkegel aan Γ, dan ligt ieder punt van Γ binnen of op K.

Een vlak door P, dat Γ volgens een eendelige kegelsnede γ snijdt, moet dus K volgens twee reële lijnen snijden; P ligt dus buiten γ.
Hieruit volgt:

Stelling: Ligt in geval b) Q binnen een vlakke doorsnede van Γ, dan ligt Q binnen Γ.

Opg. 23. Neem voor de vlakke-doorsnede Q O_0O_1 en leid m.b.v. hst. 4 opg. 22 (blz. 9) af:

Stelling: Is $f(x)=0$ de vergelijking van een kwadriek in geval b), dan is in het binnengebied $f(x)<0$ en in het buitengebied $f(x)>0$, of omgekeerd.

Opg. 24. In geval c) heeft de kwadriek twee buitengebieden.

Hoofdstuk II.

§1. Algebraische oppervlakken.

Opg. 1. Breid de theorie uit hst. 5 no. 1,2 uit tot de algebraische oppervlakken in de ruimte.

Opg. 2. Geef de definitie van een raaklijn aan een algebraisch oppervlak O.
Bewijs, dat de meetkundige plaats van de raaklijnen aan O in een punt P van O een plat vlak is, het raakvlak in P aan O.

Opg. 3. Geef de definitie van een k-voudig punt van O; stel de voorwaarde op, opdat R een meervoudig punt is van O.

§2. Vlakcoördinaten.

Opg. 1. Geef, naar analogie van hst. 6 no. 1, de definitie van de